M N 66

Beiträge zur Theorie der Kurvenkongruenzen in Einsteinschen Gravitationsfeldern

MANFRED TRÜMPER

Hamburg 1961

Beiträge zur Theorie der Kurvenkongruenzen in Einsteinschen Gravitationsfeldern

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Hamburg
vorgelegt von

Manfred Trümper
aus Wernigerode/Harz

Hamburg 1961

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Genehmigt von der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Hamburg

auf Antrag von Professor Dr. P.Jordan.

Hamburg, den 29.11.1961 Professor Dr. Kosswig
(Dekan)

Fotodruck: Mikrokopie G.m.b.H. München 2, Weinstr. 4

Vorbemerkungen

Eine Methode zur Untersuchung von Gravitationsfeldern besteht darin, aus der Analyse des Feldes im Vakuum Schlüsse zu ziehen über die Beschaffenheit seiner Quellen. Es versteht sich aus der Theorie von selbst, daß dabei den zeitartigen und lichtartigen Kongruenzen eine besondere Bedeutung zukommt, da sie geometrische Eigenschaften der Raumzeit ausdrücken, die durch Experimente nachgeprüft werden können.

Unter einem Probekörper wollen wir ein Teilchen verstehen, welches so klein ist, daß sein Beitrag zum Gravitationsfeld vernachlässigt werden kann. Einen Probekörper nennen wir frei, wenn keinen nichtgravischen Kräfte auf ihn wirken. Die Weltlinie eines freien Probekörpers ist eine zeitartige Geodätische.

Lichtartige Kongruenzen innerhalb der Theorie wurden erst in den letzten Jahren stärker beachtet, nachdem die zentrale Bedeutung des Konformkrümmungstensors und der mit ihm verbundenen lichtartigen Eigenrichtungen erkannt wurde. Die Resultate von R.K.Sachs über das Verhalten des Weylschen Tensors längs einem durch ihn bestimmten geodätischen Strahl[1] sowie die Sätze über algebraisch spezielle Felder[2] klärten zwar die Bedeutung der verschiedenen Typen in der Petrov-Klassifikation, jedoch erwies sich, daß die Annahme geodätischer Strahlen noch zu speziell war, um physikalisch realistische Strahlungsfelder zu beschreiben. Wenn auch aus diesem Grunde das Interesse an den lichtartigen Eigenrichtungen abgenommen hat, so bleiben in ihnen doch geometrische Objekte, die brauchbar sind zur Charakterisierung von Lösungen der Gravitationsfeldgleichungen.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird die Geometrie zeitartiger Kongruenzen in knapper Form soweit entwickelt,

---

1 (6) 2 (5)

wie sie für das folgende wichtig ist. Physikalisch gesprochen handelt es sich dabei um die Kinematik einer Wolke von Probeteilchen. Ganz natürlich drängt sich dabei die Frage auf, welche kinematischen Eigenschaften einer Probeteilchenwolke in einem Vakuumfeld überhaupt gestattet sind. Auf diese Frage wird anhand von Beispielen in den Paragraphen 2 und 3 eingegangen mit Resultaten, die für die Untersuchung strenger Lösungen der Gravitationsfeldgleichungen von Nutzen sind. Der Paragraph 4 enthält eine Darlegung der Geometrie lichtartiger Kongruenzen, bei der auf die bisher immer gemachte Annahme, die Kongruenz sei geodätisch, verzichtet wird.

Im zweiten Kapitel werden die lichtartigen Eigenrichtungen des Konformkrümmungstensors in statischen Vakuumfeldern untersucht und ihre Richtungen im Ruhraum eines statischen Beobachters durch die Eigenvektoren und Eigenwerte seines Riccitensors ausgedrückt. Man könnte einwenden, daß die Geometrie der Raumschnitte schon hinreichend durch die Eigenvektoren und Eigenwerte der statischen Hilfsmetrik beschrieben sei. Dies ist zwar der Fall, jedoch zeigen die Ausführungen in §5 über die Strahlenkongruenzen in Weylschen Feldern, daß man in ihnen eine geometrische Information besitzt, die zur Einteilung und Charakterisierung der Felder recht nützlich ist.

Kapitel 3 enthält Sätze über geodätische Strahlenkongruenzen in statischen Feldern, deren Raum-Metriken flächennormale Riccilinien beitzen. Es stellt sich heraus, daß die Geodäsie von Strahlen in solchen Vakuumfeldern die Existenz weiterer Symmetrien des Feldes - und damit der Quellen - impliziert. Die dort benutzten Methoden ließen sich ohne besondere Mühe übertragen auf Gravitationsfelder, die durdh die Existenz eines raumartigen hyperflächennormalen Killingvektors gekennzeichnet sind.

Hamburg, im September 1961

Manfred Trümper

Inhalt

Seite

Vorbemerkungen 2

Bezeichnungen und Konventionen 5

Kapitel 1. Zeitartige und lichtartige Kongruenzen in normalhyperbolischen Riemann-Räumen

§1 Geometrie einer Kongruenz zeitartiger Linien 6

§2 Vakuumfelder, die einen hyperflächennormalen Konformvektor enthalten 11

§3 Vakuumfelder, die eine drehungs- und scherungsfreie Kongruenz enthalten 13

§4 Geometrie einer Kongruenz lichtartiger Linien 16

Kapitel 2. Statische Gravitationsfelder und ihre lichtartigen Eigenrichtungen

§1 Definition statischer Felder 22

§2 Vakuumfeldgleichungen und Integrabilitätsbedingungen 23

§3 Statische Vakuumfelder mit parallelen Äquipotentialflächen 24

§4 Lichtartige Eigenrichtungen des Weyl-Tensors 26

§5 Weylsche Felder und ihre lichtartigen Eigenrichtungen 29

Kapitel 3. Statische Vakuumfelder mit geodätischen Strahlen

§1 Geodätische Strahlen in statischen Vakuumfeldern 33

§2 Drehungsfreie Strahlenkongruenzen in Feldern der Klasse $A = 0$. 35

§3 Geodätische Strahlenkongruenzen in Feldern der Klasse $A = 0$ 37

Literaturverzeichnis 41

Bezeichnungen und Konventionen

Hinweise auf das Literaturverzeichnis: z.B. (1)

Formelnumerierung: z.B. (1.2.3) ist ist die 3.Formel im 2.Paragraphen des 1.Kapitels

Koordinatennumerierung: $(x,y,z,t) = (x^1,x^2,x^3,x^0)$

Tensorindizes: $a,b,c... = 1, 2, 3, 0$

$\mu,\nu,\lambda... = 1, 2, 3$

$A,B,C... = 1, 2$

Gleichheit per definitionem: $\equiv$

Symmetrisierung: $T_{(ab)} \equiv 1/2(T_{ab} + T_{ba})$

Antisymmetrisierung : $T_{[ab]} \equiv 1/2(T_{ab} - T_{ba})$

Metrischer Tensor: g_{ab}, Signatur + + + −

Kovariante Ableitung nach x^c: z.B. $T_{ab;c}$

gewöhnliche Ableitung nach x^c: z.B. $T_{ab,c}$

Riemanntensor: R_{abcd}, wie in (1),(3),(4),(5)

Weylscher Tensor (= Konformkrümmungstensor): C_{abcd}

Ricci-Identität: $u_{a;[bc]} = -\frac{1}{2} R^d{}_{abc} u_d$

Riccitensor $R_{ab} = R^c{}_{acb}$

Kapitel 1. Zeitartige und lichtartige Kongruenzen in normalhyperbolischen Riemannschen Räumen

§1. Geometrie einer Kongruenz zeitartiger Linien

Eine Kongruenz zeitartiger Linien sei gegeben durch die Funktionen $x^a = x^a(s,y^\mu)$, dabei sei s die Bogenlänge (Eigenzeit) längs einer Kurve und jedem Parameter-Tripel (y^1,y^2,y^3) sei genau eine Linie der Kongruenz zugeordnet. Denkt man sich die Kongruenz als Weltlinienschar einer Probekörper-Wolke, so ist die Teilchengeschwindigkeit

$$u^a \equiv \frac{\partial x^a}{\partial s}, \quad u_a u^a = -1 .$$

Wir zeichnen die Weltlinie eines beliebigen Teilchens mit den Parameterwerten $y^\mu = c^\mu$ aus und ziehen zu den Nachbarteilchen $(y^\mu = c^\mu + \delta c^\mu)$ die Verbindungsvektoren

$$\delta x^a \equiv \frac{\partial x^a}{\partial y^\mu} \delta c^\mu .$$

Sodann führen wir den Tensor $h_a^b = \delta_a^b + u_a u^b$ $(h_a^c h_c^b = h_a^b$, $h_c^c = 3$, $h_a^c u_c = 0)$ ein, der in den lokalen Ruhraum von u^a projiziert und bilden die Projektionen

$$\eta^a = h_c^a \delta x^c, \quad \eta^a u_a = 0. \tag{1.1.1}$$

Berechnen wir die Relativgeschwindigkeit

$$v^a \equiv h_c^a \eta^c{}_{;b} u^b$$

der Teilchen, so erhalten wir dafür wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen nach den voneinander unabhängigen Variablen s und y^μ

$$v^a = u^a{}_{;b} \eta^b . \tag{1.1.2}$$

Da u^a ein normiertes Vektorfeld ist, können wir hierfür auch schreiben

$$v^a = h_c^a u^c{}_{;d} h_b^d \eta^b .$$

Das bedeutet: Die Änderung (relativ zu Fermi-verschobenen Achsen), die das Vektorsystem η^a beim Verstreichen des

Eigenzeitintervalles ds erfährt, ist bestimmt durch den Tensor $h^a_c u^c{}_{;d} h^d_b$. Diesen zerlegen wir nun in seinen schiefen, seinen spurfreien symmetrischen und in seinen Spur-Anteil

$$h^c_a u_{c;d} h^d_b = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{\Theta}{3} h_{ab} \qquad (1.1.3)$$

mit

$$\omega_{ab} \equiv h^c_a u_{[c;d]} h^d_b \,, \qquad (1.1.4)$$

$$\sigma_{ab} \equiv h^c_a [u_{(c;d)} - \frac{\Theta}{3} h_{cd}] h^d_b \,, \qquad (1.1.5)$$

$$\Theta \equiv u^r{}_{;r} \,.$$

Wenn wir den Tensor $u_{a;b} \equiv \delta^c_a u_{c;d} \delta^d_b$ unter Benutzung der "Vollständigkeitsrelation" $g_{ac} = h_{ac} - u_a u_c$ aufschreiben, erhalten wir

$$u_{a;b} = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{\Theta}{3} h_{ab} - \dot{u}_a u_b, \qquad (1.1.6)$$

$$\dot{u}_a \equiv u_{a;c} u^c.$$

Zur Analyse der Anteile in der Zerlegung (1.1.3)[1] spalten wir den Vektor η^a auf in seinen Betrag r (räumlicher Abstand des benachbarten Teilchens) und den Einheitsvektor e^a in Richtung des Nachbarteilchens:

$$\eta^a = r \cdot e^a, \qquad (1.1.7)$$

$$r = (\eta_a \eta^a)^{1/2}, \quad e_a e^a = 1.$$

Dann ergibt (1.1.2) mit (1.1.3) (der übergesetzte Punkt bedeutet in diesem Paragraphen immer Ableitung in Richtung u^a)

$$\dot{r}/r = \sigma_{ab} e^a e^b + \frac{\Theta}{3} \,, \qquad (1.1.8)$$

$$h^a_c \dot{e}^c = \omega^a{}_c e^c + (\sigma^a_c - \sigma^d_b e^b e_d \delta^a_c) \cdot e^c. \qquad (1.1.9)$$

Betrachten wir zunächst die relative Abstandsänderung $\dot{r}/r$, die aus dem isotropen Anteil $\Theta/3$ und einem anisotropen

---

[1] vgl. hierzu auch (10)

Anteil besteht. Als spurfreier symmetrischer Tensor vermittelt σ_{ab} eine volumentreue Abbildung der von den e^a aufgespannten Parallelepipede, d.h. ein infinitesimales Volumenelement erfährt eine volumentreue Deformation, die im physikalischen Sprachgebrauch als Scherung bezeichnet wird. σ_{ab} heißt daher der Scherungstensor der Kongruenz, der Skalar $\sigma \equiv (\frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab})^{1/2}$ wird als Scherung bezeichnet. Die Eigenrichtungen von σ_{ab} nennt man Hauptscherungsrichtungen, da in ihnen die relative Abstandsänderung extremal ist.

Denken wir uns eine infinitesimale Kugel mit dem Volumen $V = \text{const}\cdot r^3$ um das Zentralteilchen gelegt und bilden die relative Volumenänderung $\dot{V}/V = 3\dot{r}/r$, so ist diese nur dem isotropen Anteil der relativen Abstandsänderung zuzuschreiben; sie ist also gegeben durch den Skalar Θ, der daher die Expansion der Kongruenz genannt wird.

Nunmehr wenden wir uns der Formel (1.1.9) zu, die wegen $\dot{e}_a e^a = 0$ die Drehung der Nachbarteilchen um das Zentralteilchen charakterisiert. Betrachten wir diejenigen Nachbarteilchen, die in Richtung der Hauptscherungsrichtungen liegen, so gilt für diese

$$h_c^a \dot{e}^c = \omega^a{}_c e^c .$$

Wegen $\omega_{ac}u^c = 0$ hat ω_{ac} den Rang 2, ist also ein einfacher Bivektor und kann in der Form

$$\omega_{ab} = 2\omega\,\xi_{[a}\lambda_{b]}$$

$$(\xi_a\xi^a = \lambda_a\lambda^a = 1,\ \xi_a\lambda^a = \xi_a u^a = \lambda_a u^a = 0)$$

geschrieben werden. Das auf diese Weise von ω_{ab} bestimmte zweidimensionale raumartige Flächenelement charakterisiert also die Schar der zueinander parallelen Ebenen, in denen sich diejenigen Nachbarteilchen drehen, die sich momentan in Richtung der Hauptscherungsrichtungen befinden. ω_{ab} heißt daher der Wirbeltensor der Kongruenz, während man $\omega \equiv (\frac{1}{2}\omega_{ab}\omega^{ab})^{1/2}$ den Wirbelskalar nennt. Ergänzen wir die Vektoren u_a, ξ_a, λ_a durch einen Einheitsvektor ν_a zu einem orthonormalen Vierbein, so kennzeichnet ν_a die Achse,

um die lokal die Teilchendrehung erfolgt. Der Vektor $\omega^a \equiv \omega \cdot v^a$ beschreibt die relative Teilchendrehung ebenso gut wie ω_{ab} und heißt Wirbelvektor, seine Trajektorien sind die Wirbellinien. Natürlich verschwinden ω_{ab}, ω_a und ω nur gleichzeitig, genau wie σ_{ab} und σ.

Während die kinematischen Größen ω_{ab}, σ_{ab}, und Θ die Bewegung der Nachbarteilchen relativ zu einem Zentralteilchen beschreiben, ist $\dot{u}_a$ ein raumartiger Vektor, der jeder Weltlinie für sich zukommt. Er heißt Beschleunigungsvektor, sein Betrag $u \equiv (\dot{u}_a \dot{u}^a)^{1/2}$ heißt die Beschleunigung eines Teilchens. Da für einen freien Probekörper $u = 0$ ist, kann eine beschleunigte Teilchenbewegung nur dadurch zustande kommen, daß nichtgravische Kräfte mitwirken. Denken wir uns die nichtgravischen Kräfte zu einer bestimmten Zeit "abgeschaltet", so begibt sich der nunmehr freie Probekörper auf eine geodätische Bahn; und zwar ist die Beschleunigung, die er in demjenigen Raum erfährt, in dem er vor dem "Abschalten" ruhte, gegeben durch den Beschleunigungsvektor $\dot{u}_a$. Dieser mißt also die von den nichtgravischen Kräften an dem Probekörper bewirkte Beschleunigung.

Als eine weitere Größe, welche die Relativbewegung der Probekörper beschreibt, haben wir die Relativbeschleunigung

$$b^a \equiv h^a_c \dot{v}^c$$

zu betrachten. Aus (1.1.2) erhalten wir

$$b^a = u^a{}_{;c} \dot{\eta}^c + u^b{}_{;cd} \eta^c u^d h^a_b$$

und daraus bekommen wir nach leichter Umformung unter Benutzung der Ricci-Identität

$$b^a = (R^a{}_{bcd} u^b u^d + h^a_b \dot{u}^b{}_{;c} + \dot{u}^a \dot{u}_c) \cdot \eta^c. \qquad (1.1.10)$$

Zur Vervollständigung der Formeln wollen wir noch die Beziehungen angeben, die sich ergeben, wenn wir die Koordinaten der Kongruenz anpassen. Dazu führen wir den Projektionstensor h_{ab} in die metrische Fundamentalform ein, sodaß

die Metrik lautet

$$Q = h_{ab}dx^a dx^b - (u_a dx^a)^2.$$

Wenn wir nun die Koordinaten so wählen[1], daß

$$u^a = V^{-1}\delta^a_o \qquad (1.1.11)$$

ist, so gilt wegen $h_{ab}u^b = 0$ und (1.1.11) $h_{oa} = 0$. Unter Verwendung der Abkürzung $g_{o\mu} = -V^2 a_\mu$ wird die Metrik dann

$$Q = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - V^2(dt + a_\mu dx^\mu)^2 . \qquad (1.1.12)$$

Für die kinematischen Größen erhalten wir in diesen Koordinaten (die o-Komponenten verschwinden wegen (1.1.11))

$$\omega_{\mu\nu} = -V(a_{[\mu,\nu]} + a_{[\mu}a_{\nu],o}), \qquad (1.1.13)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2V}h_{\mu\nu,o} - \frac{1}{6V}\frac{h_{,o}}{h}h_{\mu\nu}, \qquad (1.1.14)$$

$$\Theta = \frac{1}{2V}\frac{h_{,o}}{h} , \qquad (1.1.15)$$

wenn h die Determinante von $h_{\mu\nu}$ ist. Die Formel für den Beschleunigungsvektor lautet

$$\dot{u}_\mu = -V^{-1}(Va_\mu)_{,o} + V^{-1}V_{,\mu}. \qquad (1.1.16)$$

Falls die Kongruenz durch das Gravitationsfeld eindeutig ausgezeichnet ist, kann man U[2] als das Gravitationspotential des Feldes bezeichnen; ein Beispiel dafür sind die statischen Felder.

Die Formeln (1.1.11-16) gestatten es, Normalformen für die Metriken solcher Felder herzuleiten, die zeitartige Kongruenzen mit speziellen kinematischen Eigenschaften enthalten.

Eine wichtige Frage, die im Anschluß an (1.1.11-16) gestellt werden muß, ist die folgende:

---

[1] vgl. hierzu (1) und (9)

[2] $U = \log V$

Da die kinematischen Eigenschaften einer Probeteilchen-Wolke sich ausdrücken lassen durch Bedingungen für die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform, welche zusätzlichen Aussagen über ω, σ und Θ ergeben sich dann aus den Vakuumfeldgleichungen und deren Integrabilitätsbedingungen? Welche Relativbewegungungen sind einer Probeteilchen-Wolke in einem Vakuumfeld überhaupt erlaubt?

Wir behandeln diese Frage in den beiden nächsten Paragraphen an zwei Beispielen, das erzielte Resultat wird in Kapitel 3 benötigt.

§2. Vakuumfelder, die einen hyperflächenorthogonalen Konformvektor enthalten

Wir nennen ξ_a einen Konformvektor, wenn er Erzeugender einer infinitesimalen Konformtransformation[1] ist, d.h. wenn er den Gleichungen

$$\xi_{a;b} + \xi_{b;a} - \frac{1}{2}\,\xi^{c}{}_{;c} g_{ab} = 0 \qquad (1.2.1)$$

genügt. Es gilt der folgende, leicht zu beweisende Hilfssatz (1.2.1): Ist ξ_a ein nicht lichtartiger Konformvektor bezüglich der Metrik Q, F ein beliebiger Skalar mit $F_{,a}\xi^a = 0$ und ist $\lambda = \log(\xi_a\xi^a)^{-1/2} + F$, so ist $\eta_a = e^{2\lambda}\xi_a$ ein Killingvektor bezüglich der Metrik $\overline{Q} = e^{2\lambda}Q$. Genau für $F \equiv$ const. ist η_a geodätisch bezüglich $\overline{Q}$.

Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, nehmen wir jetzt an, daß ξ_a zeitartig ist und setzen $\xi_a\xi^a = -e^{2U}$, die folgenden Betrachtungen gelten jedoch entsprechend auch für raumartiges ξ_a.

Wegen (1.2.1) gilt für die durch ξ_a bestimmte Kongruenz $\sigma = 0$, während die Annahme, die Kongruenz besitze Orthogonalhyperflächen, gleichwertig ist mit $\omega = 0$.

Wir wollen beweisen, daß infolge der Vakuumfeldgleichungen $\Theta = 0$ sein muß.

---

[1] siehe z.B. (2)

Wenn wir orthogonale Koordinaten bezüglich der Normalhyperflächen von ξ_a benutzen, so folgt aus $\sigma = \omega = 0$ und dem Hilfssatz (1.2.1), daß die Metrik in der Form

$$Q = e^{2U}(h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dt^2), \quad h_{\mu\nu}(x^\lambda), \; U(x^a), \qquad (1.2.2)$$

geschrieben werden kann.

Die Vakuumfeldgleichungen lassen sich dann leicht aufstellen mit Hilfe der Formeln, die es gestatten, den Ricci-tensor einer konformtransformierten Metrik auf den Ricci-tensor der Metrik selbst zurück zu führen[1]. Aus $R_{o\mu} = 0$ folgt $(e^{-U})_{,o\mu} = 0$, also $e^{-U} = a(t) + Y(x^\lambda)$ mit beliebigen Funktionen a und Y. Daraufhin ergeben $R_{oo} = 0$ und $R_{\mu\nu} = 0$

$$\hat{R}_{\mu\nu} - 2\frac{Y_{\|\mu\nu}}{a+Y} - \frac{2a''}{a+Y}h_{\mu\nu} = 0. \qquad (1.2.3)$$

Hier ist $\hat{R}_{\mu\nu}$ der Riccitensor von $\hat{q} \equiv h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ und die kovariante $\|$-Ableitung ist bezüglich $\hat{q}$.

Berechnen wir noch für $u_a = e^{-U}\xi_a$ die Expansion, so erhalten wir $\Theta = -3a'$.

Da q eine rein räumliche Metrik ist, folgt aus (1.2.3), daß für $a' \neq 0$ $\hat{q}$ die Metrik eines Raumes konstanter Krümmung ist. Der Weylsche Tensor des direkten Produktes $\hat{q} - dt^2$ eines dreidimensionalen Raumes konstanter Krümmung mit einer Geraden verschwindet identisch, d.h. Q ist konform zur pseudoeuklidischen Welt, folglich als Vakuumfeld selbst flach. Wenn wir das ausschließen, muß also $a' = 0$, d.h. $\Theta = 0$ sein und damit verschwindet auch $\xi^c{}_{;c}$. Wir erhalten den Satz (1.2.1): Ein nicht lichtartiger, hyperflächennormaler Konformvektor in einem Vakuumfeld (mit $R_{abcd} \neq 0$) hat verschwindende Divergenz, ist also ein Killingvektor.

Einer Probeteilchen-Wolke ist es also in einem Vakuumfeld nicht erlaubt, sich drehungsfrei so zu bewegen, daß die Weltlinien infinitesimale Konformtransformationen ihrer Orthogonalhyperflächen vermitteln, sondern die Relativabstände müssen konstant und das Vakuumfeld muß statisch sein.

---

1 vgl.(3),(4)

§3. Vakuumfelder, die eine drehungsfreie und scherungsfreie Kongruenz enthalten

Wir schwächen die Voraussetzungen für den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz ab und nehmen von der zeitartigen Kongruenz u^a jetzt nur an, daß ihre Scherung und ihr Wirbelskalar verschwindet, d.h. es soll gelten

$$\sigma = 0, \quad \omega = 0. \tag{1.3.1}$$

Wenn wir wie in §2 die Koordinaten so wählen, daß $u^a = e^{-U}\delta^a_o$ mit $e^U \equiv V$ ist und orthogonale Koordinaten bezüglich der Normalhyperflächen von u^a benutzen, nimmt die Metrik die Gestalt

$$Q = e^{2M}\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - e^{2U}dt^2 \tag{1.3.2}$$

an mit $M(x^a)$, $U(x^a)$ und $\gamma_{\mu\nu}(x^\lambda)$. Wir stellen die Vakuumfeldgleichungen auf und drücken alles durch metrische Operationen bezüglich der Hilfsmetrik $\tilde{q} = \gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ aus; ein Doppelpunkt bedeutet im folgenden kovariante Ableitung in $\tilde{q}$, ein übergesetzter Punkt bedeutet Ableitung nach t. Dann ist

$$R^o_o = \frac{1}{V}(V^{:\lambda}{}_\lambda + V_{,\lambda}M^{,\lambda})e^{-2M} - \frac{2}{V}(\frac{\dot{M}}{V})^{\cdot} - 3(\frac{\dot{M}}{V})^2 = 0, \tag{1.3.3}$$

$$R^o_\mu = -\frac{2}{V}(\frac{\dot{M}}{V})_{,\mu} = 0 \tag{1.3.4}$$

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + M_{:\mu\nu} - M_{,\mu}M_{,\nu} + \frac{1}{V}(V_{:\mu\nu} - V_{,\mu}M_{,\nu} - M_{,\mu}V_{,\nu})$$
$$+ [M^{:\lambda}{}_\lambda + M_{,\lambda}M^{,\lambda} - \frac{1}{V}e^{2M}(\frac{\dot{M}}{V})^{\cdot} - 3e^{2M}(\frac{\dot{M}}{V})^2 + \frac{1}{V}M_{,\lambda}V^{,\lambda}]\gamma_{\mu\nu} = 0 \tag{1.3.5}$$

Verjüngt man (1.3.5), so ergibt sich mit (1.3.3)

$$\tilde{R} + 4M^{:\lambda}{}_\lambda + 2M_{,\lambda}M^{,\lambda} - 6e^{2M}(\frac{\dot{M}}{V})^2 = 0. \tag{1.3.6}$$

Diese Gleichung ist ein Integral von (1.3.3), wie man durch Differentiation nach t bestätigt. Wir brauchen also nur noch (1.3.4,6) und den spurfreien Anteil von (1.3.5) zu berücksichtigen. (1.3.4) besagt, daß die Expansion $\Theta = 3\dot{M}/V$ nur von t abhängt. Danach verschwindet Θ genau für $\dot{M} = 0$. In diesem

Falle kann $M = 0$ gesetzt werden und die Feldgleichungen sind dieselben wie bei statischen Feldern (vgl.Kap.2,§2), nur daß V noch von t abhängen kann. Falls der Riccitensor des "Raumes" nicht entartet ist, folgt aus den Integrabilitätsbedingungen (2.2.4) unmittelbar, daß V die Gestalt $W(x^\mu)\cdot F(t)$ hat, d.h. daß eine statische Welt vorliegt. Wir schließen nun den Fall $\dot{M} = 0$ aus und werden zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Wir eliminieren aus (1.3.4) $V^{-1}V_{,\mu}$ und tragen dies in (1.3.5) ein. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}&\tilde{R}_{\mu\nu} + M_{;\mu\nu} - M_{,\mu}M_{,\nu} + \dot{M}^{-1}(M_{;\mu\nu} - M_{,\mu}M_{,\nu})^{\cdot} \\ &- \tfrac{1}{3}[\tilde{R} + M^{;\lambda}{}_{\lambda} - M_{,\lambda}M^{,\lambda} + \tfrac{1}{\dot{M}}(M^{;\lambda}{}_{\lambda} - M_{,\lambda}M^{,\lambda})^{\cdot}]\gamma_{\mu\nu} = 0.\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Neben der Hilfsmetrik $\tilde{q}$ betrachten wir die durch Q in den Orthogonalflächen von u^a induzierte Metrik $\bar{q} = e^{2M}\tilde{q}$ und bezeichnen ihren Riccitensor mit $\bar{R}_{\mu\nu}$. (1.3.7) ist dann äquivalent mit

$$[e^{M}(\bar{R}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{3}\bar{R}g_{\mu\nu})]^{\cdot} = 0.$$

Unter der Voraussetzung $\dot{M} \neq 0$ folgt also aus den Feldgleichungen, daß der Tensor

$$C_{\mu\nu} \equiv e^{M}(\bar{R}_{\mu\nu} - \tfrac{\bar{R}}{3}g_{\mu\nu}) \tag{1.3.8}$$

nicht von t abhängt. Neben dem Tensor $\tilde{R}_{\mu\nu}$ gibt es also infolge der Feldgleichungen noch den von t unabhängigen Tensor $C_{\mu\nu}$; zwischen den beiden Tensoren besteht ein Zusammenhang, der durch die Formeln für die Konformtransformation von Metriken gegeben ist:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - e^{M}(e^{-M})_{;\mu\nu} - \tfrac{1}{3}[\tilde{R} - e^{M}(e^{-M})^{;\lambda}{}_{\lambda}]\gamma_{\mu\nu} = e^{-M}C_{\mu\nu}. \tag{1.3.9}$$

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$P \equiv e^{-M}, \tag{1.3.10}$$

dann können wir für (1.3.9) schreiben

$$P\tilde{R}_{\mu\nu} - P_{;\mu\nu} - \tfrac{1}{3}[P\tilde{R} - P^{;\lambda}{}_{\lambda}]\gamma_{\mu\nu} - P^2C_{\mu\nu} = 0. \tag{1.3.11}$$

Die Gleichung (1.3.11) differenzieren wir kovariant nach x^λ, bilden den bezüglich ν,λ schiefen Anteil und eliminieren die dritten Ableitungen von P mittels der Ricci-Identität

$$P_{:\mu[\nu\lambda]} = \frac{1}{2}\,\tilde{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\nu}P_{,\sigma}\,,$$

die wegen der algebraischen Äquivalenz von $\tilde{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\nu}$ mit $\tilde{R}_{\mu\lambda}$[1] auch so geschrieben werden kann:

$$P_{:\mu[\nu\lambda]} = \tilde{R}_{\mu[\nu}P_{,\lambda]} + \gamma_{\mu[\nu}\tilde{R}^{\sigma}_{\lambda]}P_{,\sigma} - \frac{1}{2}\,\tilde{R}\,\gamma_{\mu[\nu}P_{,\lambda]}\,.$$

Der beim Differenzieren auftretende Ausdruck $(P^{:\lambda}{}_{\lambda})_{,\nu}$ kann ersetzt werden unter Benutzung von (1.3.6):

$$\tilde{R} - \frac{4}{P}P^{:\lambda}{}_{\lambda} + 6P^{-2}[P_{,\lambda}P^{,\lambda} - (\frac{\dot{P}}{VP})^2] = 0.$$

Es ergeben sich dann die Gleichungen

$$\tilde{R}^{\mu}_{[\nu:\lambda]} - \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{[\nu}\tilde{R}_{,\lambda]} - \delta^{\mu}_{[\nu}C^{\sigma}_{\lambda]}P_{,\sigma} - 2C^{\mu}_{[\nu}P_{,\lambda]} - PC^{\mu}_{[\nu:\lambda]} = 0. \quad (1.3.12)$$

Zur Analyse von (1.3.12) führen wir die Eigenwerte c_α und die Eigenvektoren von $C_{\mu\nu}$ ein. Nennen wir die Eigenvektoren n^μ_α, so folgt aus (1.3.12)

$$c_{\alpha;\beta} + P(c_\alpha - c_\beta)\gamma_{\beta\alpha\alpha} + \frac{1}{4}\tilde{R}_{,\beta} + 2\tilde{R}^{\mu}_{[\nu:\lambda]}n^{\nu}_{\beta}n^{\lambda}_{\alpha}n_{\mu\alpha} + (c_\alpha - c_\gamma)P_{,\beta} = 0,$$

$$\alpha,\beta,\gamma \neq,\quad F_{,\beta} \equiv F_{,\lambda}n^{\lambda}_{\beta},\quad \gamma_{\alpha\beta\gamma} = n_{\alpha\mu:\lambda}n^{\mu}_{\beta}n^{\lambda}_{\gamma}.$$

Wenn die Eigenwerte von $C_{\mu\nu}$ verschieden sind, folgt aus der letzten Gleichung $P(x^\mu) = A(t)Q(x^\mu) + R(x^\mu)$, d.h. es ist nach (1.3.10) $M = -\log(AQ+R)$. Die Feldgleichung (1.3.4) sagt aus, daß $\dot{M}/V$ eine Funktion von t allein ist, also ist V von der Gestalt

$$V = \eta(t)\,Q(AQ+R)^{-1}.$$

Durch Abänderung von t kann $\eta = 1$ erreicht werden und die Metrik geht über in

$$Q^2(AQ+R)^{-2}[\hat{q} - dt^2] \text{ mit } \hat{q} = Q^{-2}\tilde{q}.$$

Es gibt also einen hyperflächennormalen Konformvektor, der nach Satz (1.2.1) ein Killingvektor sein muß. Das aber widerspricht der Annahme $\dot{M} \neq 0$. Es gilt also der folgende

---

[1] siehe (3), S.60

[2] die Indexverschiebungen sind natürlich mit der Hilfsmetrik $\tilde{q}$ ausgeführt, also $C^{\mu}_{\nu} = \gamma^{\mu\lambda}C_{\nu\lambda}$.

Satz (1.3.1): Eine zeitartige Kongruenz in einem Vakuumfeld Q habe verschwindende Scherung und sei wirbelfrei, der reduzierte Riccitensor der von Q in den Orthogonalhyperflächen zu u^a induzierten Metrik sei nicht entartet. Dann ist die Kongruenz Trajektorienschar eines Killingvektorfeldes.

In anderen Worten gesagt heißt das: Eine Wolke von Probeteilchen, die sich drehungs- und scherungsfrei in einem Vakuumfeld bewegt, kann nicht expandieren, sondern bewegt sich "starr", das Gravitationsfeld ist statisch. Dies gilt unter der Voraussetzung, daß der reduzierte Riccitensor des Raumes nicht entartet ist. Es ist jedoch zu vermuten, daß diese Einschränkung nicht gemacht werden muß, der Beweis des Satzes erfordert dann aber weitergehende Rechnungen.

Die Annahme, es handele sich um eine zeitartige Kongruenz, ist nur gemacht worden, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben. Definiert man jedoch für eine raumartige Kongruenz die den kinematischen Größen formal analogen Gebilde, so gilt der Satz entsprechend.

§4 Geometrie einer Kongruenz lichtartiger Linien[1]

Eine Kongruenz lichtartiger Linien sei gegeben durch die Funktionen $x^a = x^a(v,y^\mu)$, dabei sei v irgendein längs einer Kurve variierender Parameter, und jedem Parameter-Tripel (y^1,y^2, y^3) sei genau eine Kurve der Kongruenz zugeordnet. Denkt man sich die Kongruenz als Trajektorienschar einer "Wolke" von Photonen, so sind deren Bahnen charakterisiert durch ihre Tangentenvektoren

$$k^a \equiv \frac{\partial x^a}{\partial v}\,, \quad k_a k^a = 0. \qquad (1.4.1)$$

Statt "Kongruenz lichtartiger Linien" sagt man auch "Nullkongruenz" oder "Kongruenz von Nullinien". Wir bezeichnen den Vektor k^a als Strahlenvektor und nennen seine Trajektorien die Strahlen.

---

[1] vgl. hierzu (5),Kap.1

Von einem Zentralstrahl, gekennzeichnet durch die Parameterwerte $y^\mu = c^\mu$, ziehen wir zu einem Nachbarstrahl ($y^\mu = c^\mu + \delta c^\mu$) den Verbindungsvektor

$$\eta^a \equiv \frac{\partial x^a}{\partial y^\mu}\delta c^\mu \ . \qquad (1.4.2)$$

Anders als bei zeitartigen Kongruenzen, bei denen es möglich war, die Eigenzeit s als (bis auf eine additive Konstante) eindeutig bestimmten Kurvenparameter einzuführen, kann jetzt der Parameter v noch beliebige monotone Transformationen

$$v' = v'(v, y^\mu), \quad \frac{\partial v'}{\partial v} > 0, \qquad (1.4.3)$$

erfahren. Da bei einer solchen Parametertransformation $x^a(v, y^\mu) = x^a(v', y^\mu)$ sein muß, gilt für den Strahlenvektor

$$k'^a = A k^a \ , \quad A = \quad , \qquad (1.4.4)$$

für den Verbindungsvektor gilt

$$\eta'^a = \eta^a - k^a \delta v', \quad \delta v' \equiv \frac{\partial v'}{\partial y^\mu}\delta c^\mu . \qquad (1.4.5)$$

Die letzte Gleichung bedeutet, daß in einem Punkt des Zentralstrahls die Gesamtheit derjenigen Nachbarstrahlen, die ein zu k^a orthogonales Flächenelement δF schneiden, unabhängig ist von δF. Mit anderen Worten: Für jeden "Beobachter" u^a passieren dieselben Photonen einem in seinem Ruhraum senkrecht zur Strahlrichtung aufgestellten Schirm gleichzeitig. Weiter sagt (1.4.5) aus, daß die Abstände zwischen dem Zentralstrahl und zwei beliebigen Nachbarstrahlen, die ein zu k^a orthogonales Flächenelement schneiden, sowie der Winkel zwischen den beiden Verbindungsvektoren unabhängig sind von der Wahl des Flächenelementes.

Wir müssen nun das Verhalten der betrachteten Vektoren längs k^a studieren. Für den Vektor $\dot{k}_a \equiv k_{a;b}k^b$ (der übergesetzte Punkt bedeutet in diesem Paragraphen immer kovariante Ableitung in Richtung k^a), der wegen $\dot{k}_a k^a = 0$ raumartig ist, gilt $\dot{k}_a \dot{k}^a = 0$ genau dann, wenn die Kongruenz geodätisch ist. Während die Beziehung $\dot{k}a\dot{k}^a = 0$ also eine invariante, d.h. von der Parameterwahl unabhängige Bedeutung

hat, gilt im Falle $\dot{k}_a\dot{k}^a \neq 0$ bei einer Parametertransformation

$$v \to v' : \quad \dot{k}_a\dot{k}^a \longrightarrow \dot{k}_a\dot{k}^a \cdot A^4.$$

Wir sehen daran, daß der Ausdruck $(\dot{k}_a\dot{k}^a)^{1/4}dv$ eine Invariante des Strahls ist. Wir bezeichnen das von irgendeinem Punkt v_1 an längs dem Strahl erstreckte (invariante) Integral

$$K(v) = \int_{v_1}^{v} (\dot{k}_a\dot{k}^a)^{1/4} dv$$

als die Krümmung des Strahls.

Wir berechnen nun die Änderung des Verbindungsvektors beim Fortschreiten in Strahlrichtung. Aus

$$\dot{\eta}^a = \eta^a{}_{;b}k^b$$

erhalten wir wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen nach den von einander unabhängigen Variablen v und y^μ

$$\dot{\eta}^a = k^a{}_{;b}\eta^b, \qquad (1.4.6)$$

und daraus folgt $(k_a\eta^a)^{\cdot} = \dot{k}_a\eta^a$. Die in einem Punkt des Zentralstrahls zu ihm orthogonalen Verbindungsvektoren bleiben also im Allgemeinen nicht orthogonal zum Strahl. Wenn jedoch in einem Punkt $\eta^a k_a = \eta^a \dot{k}_a = 0$ ist, so gilt auch noch in einer Umgebung erster Ordnung (längs dem Strahl) $k_a\eta^a = 0$. D.h. es gibt ein den Zentralstrahl enthaltendes infinitesimales Streifenstück von Nachbarstrahlen, die in jedem Punkt für jeden Beobachter ein zu k^a orthogonales Flächenelement schneiden. Von den Photonen, die den ersten Schirm gleichzeitig passierten, kommen nur diejenigen gleichzeitig an dem (um ein infinitesimales Stück dv verschobenen) zweiten Schirm an, deren Bahnen in dem Streifenstück liegen. Diejenigen mit $\dot{k}_a\eta^a > 0$ kommen früher, die mit $\dot{k}_a\eta^a < 0$ kommen später an. Um zu erreichen, daß die Photonen den zweiten Schirm gleichzeitig passieren, darf dieser also nicht senkrecht zur Strahlrichtung aufgestellt werden, sondern muß um seine Schnittlinie mit dem Streifen gekippt werden. Diese Schnittlinie sei durch den in ihr liegenden (raumartigen) Einheitsvektor ζ^a gekennzeichnet.

Wir wählen ein Beobachterfeld u^a so, daß $\dot{u}^a \equiv u^a{}_{;b}k^b = 0$ ist und legen den Kurvenparameter v dadurch (bis auf eine additive Konstante) fest, daß wir $u_a k^a = -1$ verlangen. Aus diesen Festsetzungen folgt dann

$$u_a \dot{k}^a = 0. \tag{1.4.7}$$

Die Vektoren k^a und u^a bestimmen ein zu ihnen orthogonales Flächenelement, das wir uns aufgespannt denken von dem komplexen Vektor $t_a = 1/\sqrt{2}(\xi_a + i\zeta_a)$, wenn ζ_a der "Streifenvektor" und ξ_a der dazu senkrechte Einheitsvektor ist. Wegen (1.4.7) ist

$$\dot{k}^a = \gamma \xi^a, \quad \gamma = (\dot{k}_a \dot{k}^a)^{1/2} \tag{1.4.8}$$

und γ ist eine längs dem Strahl eindeutig bestimmte Größe.

Wir können nun auch den Winkel $d\varphi$ bestimmen, um den der zweite Schirm gekippt werden muß, damit ihn alle diejenigen Photonen gleichzeitig passieren, die den ersten Schirm gleichzeitig passierten. Dazu denken wir uns einen Vektor $\eta^a = \eta \cdot \xi^a$ gewählt. Für diesen gilt wegen (1.4.6,8) $(\eta_a k^a)^{\cdot} = \eta\gamma$, also ist $d\varphi = \gamma dv$.

Wir untersuchen nun die infinitesimale affin kollineare Abbildung, die zwischen den um das Stück dv gegeneinander verschobenen Schirmen durch die Schnittpunkte des Strahlenbündels vermittelt wird. Dazu bilden wir den Tensor

$$h^b_a = t_a \bar{t}^b + \bar{t}_a t^b,$$

$$(h^c_a h^b_c = h^b_a,\ h^c_c = 2,\ h^c_a k_c = 0 = h^c_a u_c),$$

der auf das zu k^a und u^a orthogonale Flächenelement projiziert. Die Gesamtheit der zum Zentralstrahl orthogonalen Verbindungsvektoren $h^a_c \eta^c$ geht beim Fortschreiten längs dem Strahl um das Stück dv über in

$$h^a_c \eta^c + h^a_c k^c{}_{;b} \eta^b dv + O(dv^2) = (\delta^a_b + h^a_c k^c{}_{;e} h^e_b dv) h^b_d \eta^d + O(dv^2).$$

Die Transformation $A_{ab} \equiv h^c_a k_{c;d} h^d_b$ zerlegen wir gemäß

$$A_{ab} = A_{[ab]} + [A_{(ab)} - \frac{1}{2} A^c_c h_{ab}] + \frac{1}{2} A^c_c h_{ab}$$

in einen schiefen, einen symmetrischen spurfreien und in einen Spur- Anteil und bezeichnen als die vom Beobachter u^a gemessene

Drehung $$\omega \equiv [\tfrac{1}{2} A_{[ab]} A^{ab}]^{1/2}, \qquad (1.4.9)$$

Verzerrung $$|\sigma| \equiv [\tfrac{1}{2} A_{(ab)} A^{ab} - \tfrac{1}{4}(A^c_c)^2]^{1/2}, \qquad (1.4.10)$$

Divergenz $$\Theta \equiv \tfrac{1}{2} A^c_c \, . \qquad (1.4.11)$$

Wenn wir die Vektoren t^a und k^a durch Hinzunahme von

$$m^a \equiv \frac{1}{2}(u_c k^c)^{-2} k^a + (u_c k^c)^{-1} u^a$$

zu einem pseudo-orthonormalen Vierbein ergänzen, können wir die optischen Skalare (1.4.9,10,11) auch ausdrücken durch

$$z \equiv \Theta + i\omega = k_{a;b} \bar{t}^a t^b \qquad (1.4.12)$$

und

$$\sigma = k_{a;b} \bar{t}^a \bar{t}^b \, . \qquad (1.4.13)$$

Definieren wir weiter die Skalare $\Omega \equiv k_{a;b} \bar{t}^a m^b$ und $\gamma \equiv k_{a;b} m^a \bar{t}^b$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\omega^2 &= k_{[a;b]} k^{a;b} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(\Omega + \bar{\Omega} - \gamma - \bar{\gamma}), \\ 2|\sigma|^2 &= k_{(a;b)} k^{a;b} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(\Omega + \bar{\Omega} + \gamma + \bar{\gamma}), \qquad (1.4.14) \\ 2\Theta &= k^a{}_{;a} \, . \end{aligned}$$

Wie an (1.4.12,13) zu erkennen ist, nehmen die Größen z und σ bei einer eingeschränkten Parametertransformation einen Faktor A_0[1] auf, sie sind also durch den Strahlenvektor k^a und den Beobachter u^a nur bis auf einen gemeinsamen, längs dem Strahl konstanten Faktor bestimmt.

---

1 mit $A_{0,a} k^a = 0$

In (1.4.14) sind die Ausdrücke für ω^2 und $|\sigma|^2$ aufgeteilt in je einen Anteil, der bei fest gewähltem Parameter allein durch die Nullkongruenz festgelegt ist, und je einen, der noch vom Beobachter abhängt und überdies für eine geodätische Nullkongruenz verschwindet. Daran sehen wir, daß die optischen Skalare für eine geodätische Nullkongruenz eine vom Beobachter unabhängige Bedeutung haben.

Nichtgeodätische Nullkongruenzen sind 1960 von R.K.Sachs betrachtet worden, der den Begriff der asymptotisch geodätischen Nullkongruenz einführt und mit seiner Hilfe eine kovariante Ausstrahlungsbedingung für Gravitationsstrahlung formuliert.[1] Zu den asymptotisch geodätischen Nullkongruenzen gehören diejenigen lichtartigen Kongruenzen, die eine endliche Krümmung besitzen, d.h. für die $(\dot{k}_a \dot{k}^a)^{1/4} = O(v^{-N})$ mit $N > 1$ ist.

---

[1] siehe (6)

Kapitel 2. Statische Gravitationsvakuumfelder und ihre lichtartigen Eigenrichtungen

§1. Definition statischer Felder

Eine Welt heißt statisch, wenn es in ihr eine Wolke von Probekörpern gibt, die durch nichtgravische Kräfte so zusammengehalten wird , daß sie sich wie ein starrer Körper drehungsfrei bewegt und wenn die nichtgravische Kraft längs der Probekörperbahnen Fermi-verschoben wird[1].

In einer statischen Welt gibt es i.A. ein (bis auf einen konstanten Faktor) eindeutig bestimmtes zeitartiges Killingvektorfeld, dessen Trajektorien hyperflächenorthogonal sind. Wählt man orthogonale Koordinaten bezüglich der Normalhyperflächen der Gruppenbahnen, so nimmt die Metrik die Gestalt

$$Q = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} - e^{2U}dt^2, \qquad (2.1.1)$$
$$g_{\mu\nu}(x^{\lambda}),\quad U(x^{\lambda}),$$

an.

Die Gruppenbahnen vermitteln eine isometrische Abbildung ihrer Orthogonalhyperflächen, also kann man eine dieser Hyperflächen herausgreifen und an ihr die geometrischen Eigenschaften der Welt studieren. Man nennt sinngemäß eine Orthogonalhyperfläche den "Raum" oder auch einen "Raumschnitt". Resultate geometrischer Untersuchungen können kovariant bezüglich solcher Koordinatentransformationen formuliert werden, welche statische Koordinatensysteme in statische Koordinatensysteme überführen.

Die Frage nach der Bedeutung der Funktion U wird durch die Feststellung beantwortet, daß wegen $\omega = \sigma = \theta = 0$ und $\dot{u}_{[a}u_{b]} = 0$ für den Beschleunigungsvektor $\dot{u}_a = U_{,a}$ gilt. Das bedeutet: Ein relativ zur starren und drehungsfreien Probekörperwolke ruhender Probekörper erfährt eine Beschleunigung, die durch $U_{,a}$ gegeben ist. Daher ist es zwingend,

---

[1] vgl. (7)

die Funktion U als das Potential des statischen Gravitationsfeldes zu bezeichnen, die Flächen U = const als Äquipotentialflächen und ihre Orthogonaltrajektorien als Feldlinien.

§2. Vakuumfeldgleichungen und Integrabilitätsbedingungen.

Die Vakuumfeldgleichungen für statische Felder lassen sich nach bekannten Hilfsformeln[1] zurückführen auf Gleichungen für die Raumschnitte

$$\bar{R}_{\mu\nu} + e^{-U}(e^{U})_{\|\mu\nu} = 0, \qquad (2.2.1)$$

$$(e^{U})^{\|\lambda}{}_{\lambda} = 0. \qquad (2.2.2)$$

Dabei ist $\bar{R}_{\mu\nu}$ der Riccitensor der Raum-Metrik, der Doppelstrich bedeutet kovariante Ableitung bezüglich der Raum-Metrik.

Zur Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen führen wir nach dem Vorbilde Levi-Civitas[2] die Eigenwerte a_ν und die Eigenvektoren n_ν^λ von $R_{\mu\nu}$ ein. Unter Benutzung der Rotationskoeffizienten $\gamma_{\lambda\mu\nu} \equiv n_{\lambda\|\rho\sigma}\, n_\mu^\rho n_\nu^\sigma$ und der Richtungsableitungen $F_{.\lambda} \equiv F_{,\kappa} n_\lambda^\kappa$ lassen die Integrabilitätsbedingungen sich schreiben

$$A = \gamma_{123}(a_1 - a_2) = \gamma_{231}(a_2 - a_3) = \gamma_{312}(a_3 - a_1) \qquad (2.2.3)$$

und

$$a_{\nu.\lambda} + (a_\nu - a_\lambda)\gamma_{\lambda\nu\nu} + (a_\nu - a_\mu)U_{.\lambda} = 0, \ (\lambda,\mu,\nu \neq). \qquad (2.2.4)$$

Die Gleichungen (2.2.4) lassen sich noch etwas vereinfachen, wenn wir setzen

$$\varkappa_\mu \equiv e^{3U} a_\mu \,. \qquad (2.2.5)$$

Setzen wir das in (2.2.4) ein, so erhalten wir mit Hilfe der Spurbedingung $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 0$

$$\varkappa_{\nu.\lambda} + (\varkappa_\nu - \varkappa_\lambda)(\gamma_{\lambda\nu\nu} - U_{.\lambda}) = 0, \ \lambda \neq \nu. \qquad (2.2.6)$$

---

1 siehe (3),(4)

2 (8)

§3. Statische Vakuumfelder mit parallelen Äquipotentialflächen

Die Äquipotentialflächen U = const bilden eine parallele Flächenschar, wenn der Abstand je zweier Flächen in jedem Punkt der Fläche gleich ist. Mit Abstand ist natürlich gemeint die mit der Raum-Metrik berechnete Länge der Orthogonaltrajektorien zwischen zwei Flächen U = const. Gleichwertig mit der Parallelität der Äquipotentialflächen ist, daß die Feldlinien im Raum Geodätische sind.

Da in der Newtonschen Gravitationstheorie Felder mit geodätischen, d.h. geraden Feldlinien nur von Masseverteilungen besonders hoher Symmetrie erzeugt werden können, ist zu vermuten, daß in der Einsteinschen Gravitationstheorie bei statischen Feldern eine ähnliche Situation vorliegt. Wir stellen uns daher die Aufgabe, alle statischen Vakuumfelder mit parallelen Äquipotentialflächen zu bestimmen.

Wenn die Feldlinien im Raum geodätisch sind, so gilt

$$U_{\|\mu\nu}U^{,\nu} = \frac{1}{2}\,(U_{,\nu}U^{,\nu})_{,\mu} = \lambda U_{,\mu}$$

und daraus folgt

$$U_{,\nu}U^{,\nu} = F(U). \qquad (2.3.1)$$

Multipliziert man (2.2.1) mit $U^{,\mu}$, so erhält man mit (2.3.1)

$$R_{\mu\nu}U^{,\mu} + (\tfrac{1}{2}\frac{dF}{dU} + F)\,U_{,\nu} = 0,$$

d.h. $U^{,\mu}$ ist ein Eigenvektor von $\overline{R}_{\mu\nu}$. Da bei einem statischen Vakuumfeld entweder alle oder keins der Eigenvektorfelder n^{λ}_{μ} flächennormal ist[1], sind in unserem Falle alle drei Eigenvektorfelder flächennormal. Wir können daher die Raumkoordinaten an das orthogonale, flächennormale Netz der Ricci-Linien anpassen. Wenn wir überdies e^{U} zur x-Koordinate erklären und (2.3.1) beachten, erhalten wir für die Metrik

$$Q = e^{2R}dx + e^{2S}dy + e^{2W}dz - x^2dt^2, \qquad (2.3.2)$$

mit R = R(x), S = S(x^{λ}), W = W(x^{λ}).

---

[1] im Falle von Nichtentartung folgt das aus (2.2.3); wenn das Feld entartet ist, können alle drei Eigenvektorfelder flächennormal gewählt werden; vgl.(3).

Die Vakuumfeldgleichungen ergeben ($(\underline{\mu,\nu})$ bedeute die Gleichung $\bar{R}_{\mu\nu} + e^{-U}(e^{U})_{\|\mu\nu} = 0$)

$(\underline{1,1}) + e^{-2S}(\underline{2,2}) - e^{-2W}(\underline{3,3})$:

$$2S_{,11} + 2S_{,1}^{2} - 2S_{,1}R' + \frac{1}{x}(S_{,1} - W_{,1} - R') = 0, \quad (2.3.3)$$

$(\underline{1,1}) - e^{-2S}(\underline{2,2}) + e^{-2W}(\underline{3,3})$:

$$2W_{,11} + 2W_{,1}^{2} - 2W_{,1}R' + \frac{1}{x}(W_{,1} - S_{,1} - R') = 0, \quad (2.3.4)$$

$\underline{(e^{U})^{\|\mu}{}_{\mu} = 0}$: $$S_{,1} + W_{,1} - R' = 0, \quad (2.3.5)$$

$(\underline{1,2})$: $$W_{,12} + W_{,1}W_{,2} - W_{,2}S_{,1} = 0, \quad (2.3.6)$$

$(\underline{1,3})$: $$S_{,13} + S_{,1}S_{,3} - S_{,3}W_{,1} = 0, \quad (2.3.7)$$

dabei ist $R' = \frac{dR}{dx}$.

Subtrahiert man (2.3.4) von (2.3.3) und berücksichtigt (2.3.5), so erhält man eine Gleichung, die sich umschreiben läßt in

$$(R - 2W)_{,11} + \frac{1}{x}(R - 2W)_{,1} = 0.$$

Hieraus folgt mit (2.3.5)

$$W = \frac{1}{2}R - C\cdot\log x + D, \quad (2.3.8)$$

$$S = \frac{1}{2}R + C\cdot\log x + E, \quad (2.3.9)$$

C,D und E sind darin beliebige Funktionen von y und z.

Die Eigenwerte des Riccitensors sind

$$a_1 = e^{-2R}R'/x, \quad a_2 = -e^{-2R}S_{,1}/x, \quad a_3 = -e^{-2R}W_{,1}/x.$$

Setzt man (2.3.8) in (2.3.6) ein, so erhält man

$$C_{,2} + 2C(D_{,2} - C_{,2}\log x) = 0.$$

Für $C \equiv 0$ ist $a_2 = a_3$, d.h. das Feld ist entartet. Für $C \neq 0$ folgt aber $C_{,2} = D_{,2} = 0$, da die Gleichung für alle x zu erfüllen ist. Entsprechend folgt aus (2.3.7,9) $C_{,3} = E_{,3} = 0$, d.h. $C \equiv$ const und $D = D(z)$, $E = E(y)$, so daß man durch Abänderung der Koordinaten D und E beseitigen kann. Alle

metrischen Koeffizienten hängen nur noch von x ab, es liegt also die von Levy-Civita gefundene zylindersymmetrische Lösungsklasse vor. Im Falle der Entartung sind alle statischen Vakuumfelder explizit bekannt[1], und man hat nur nachzusehen, welche von ihnen parallele Äquipotentialflächen haben. Wir erhalten so den Satz (2.3.1): Die statischen Vakuumfelder mit parallelen Äquipotentialflächen sind die folgenden Felder:

$$Q = x^{-4m}[x^{8m^2}(dx^2 + dy^2) + x^2 dz^2] - x^{4m} dt^2, \qquad (2.3.10)$$

$$m = \text{const},$$

$$Q = \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - (1 - \frac{2m}{r})dt^2, \qquad (2.3.11)$$

$$m = \text{const},$$

$$Q = \frac{dz^2}{2m/z - 1} + z^2(dr^2 + \sin^2 r\, d\varphi^2) - (\frac{2m}{z} - 1)dt^2, \qquad (2.3.12)$$

$$m = \text{const},$$

$$Q = x dx^2 + x^2(dy^2 + dz^2) - x^{-1} dt^2. \qquad (2.3.13)$$

Für m = 0 ist (2.3.10) pseudoeuklidisch, für m = -1/2 ist (2.3.10) äquivalent mit (2.3.13); für m= 1/4 und m = 1 ist (2.3.1o) äquivalent mit derjenigen entarteten Lösung, die aus (2.3.13) durch die formale Vertauschung von z und t hervorgeht. Für alle anderen Werte von m ist (2.3.10) nicht entartet.

§4. Lichtartige Eigenrichtungen des Weylschen Tensors für statische Felder

In jedem Vakuumfeld gibt es mindestens ein und höchstens vier (notwendig lichtartige) Vektorfelder k^a, für die

$$k_{[a}C_{b]\,cd[e}k_{f]}\,k^c k^d = 0 \qquad (2.4.1)$$

gilt[2]. Man nennt sie die lichtartigen Eigenrichtungen des Weylchen Tensors oder die Strahlen des Feldes.

---

1 siehe (3)

2 vgl.(5) und die dort zitierte Literatur

Ein statisches Vakuumfeld ist immer vom Typ I oder im Falle der Entartung (Gleichheit zweier Eigenwerte von $\bar{R}_{\mu\nu}$) vom Typ I_e[1]. Wenn das Feld nicht entartet ist, gibt es also vier Nullvektorfelder, die (2.4.1) erfüllen.

Wir denken uns nun in einem statischen Koordinatensystem die Strahlenvektoren so "normiert", daß

$$k_a \xi^a = 1 , \quad \{k_a\} = \{k_\mu, 1\} , \quad k_\mu k^\mu = e^{-2U} \qquad (2.4.2)$$

ist. k_μ gibt die räumliche Richtung an, die der Strahl für einen im Raum ruhenden Beobachter besitzt, $\xi^a = \delta^a_o$ ist der zeitartige hyperflächennormale Killingvektor, der das statische Feld kennzeichnet.

Wenn wir bedenken, daß der räumliche Teil $C_{\mu\nu\lambda\rho}$ des Weylschen Tensors mit dem Riemanntensor $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\rho}$ der Raum-Metrik übereinstimmt und daß für einen dreidimensionalen Raum der Riemanntensor algebraisch äquivalent mit dem Riccitensor ist, dann können wir die Bedingungen (2.4.1) umschreiben in Beziehungen zwischen k_μ und dem Riccitensor $\bar{R}_{\mu\lambda}$ des Raumes:

$$\bar{R}^\lambda_\nu = a(\delta^\lambda_\nu + e^{2U} k^\lambda k_\nu) + e^{2U}(\bar{R}^\lambda k^\mu k_\nu + \bar{R}^\mu_\nu k_\mu k^\lambda) \qquad (2.4.3)$$

mit

$$a \equiv -\frac{1}{2} e^{2U} \bar{R}^\nu_\mu k^\mu k_\nu .$$

Dieser Gleichung entnimmt man folgendes: Wenn k_μ ein Eigenvektor von $\bar{R}^\lambda_\nu$ ist, dann zum Eigenwert $-2a$, und es ist

$$\bar{R}^\lambda_\nu = a\delta^\lambda_\nu - 3a e^{2U} k^\lambda k_\nu , \qquad (2.4.4)$$

d.h. es liegt Entartung vor, da jeder Vektor, der orthogonal zu k_λ ist, ein Eigenvektor von $\bar{R}^\lambda_\nu$ ist. Wenn umgekehrt das Feld entartet ist, so hat $\bar{R}^\lambda_\nu$ die Gestalt (2.4.4). Ein statisches Vakuumfeld ist also genau dann entartet, wenn die Raumprojektionen der lichtartigen Eigenrichtungen des Weyltensors Eigenrichtungen des Riccitensors der Raum-Metrik sind.

Wir schließen diesen Fall jetzt aus und fragen nach der Lage von k_μ zu den Eigenvektoren von $\bar{R}^\lambda_\nu$. Dazu multiplizieren

---

[1] siehe (3)

wir (2.4.3) mit $n_{\sigma\lambda}n^{\nu}_{\tau}$ und erhalten

$$k_\mu n^\mu_\sigma \cdot k_\lambda n^\lambda_\tau (a + \underset{\sigma}{a} + \underset{\tau}{a}) = 0. \qquad (2.4.5)$$

Da k_μ (bei Nichtentartung) höchstens auf einem Eigenvektor $\perp$ stehen darf, gibt es also zwei Eigenvektoren, sagen wir n^μ_σ und n^λ_τ, mit $k_\lambda n^\lambda_\sigma \neq 0 \neq k_\lambda n^\lambda_\tau$. Folglich ist $a + \underset{\sigma}{a} + \underset{\tau}{a} = 0$, d.h. a ist selbst ein Eigenwert von $\bar{R}^\lambda_\nu$. Durch k_λ ist nach (2.4.3) a eindeutig bestimmt, also muß k_λ wegen (2.4.5) auf mindestens einem Eigenvektor senkrecht stehen, nach oben gesagtem also auf genau einem. Sei dieser Eigenvektor n^λ_1, $k_\lambda n^\lambda_1 = 0$, dann ist $a = \underset{1}{a}$, und für k^μ muß gelten

$$k^\mu = e^{-U}(\cos\Omega\, n^\mu_2 + \sin\Omega\, n^\mu_3),$$

mit noch zu bestimmendem $\cos\Omega$ bzw $\sin\Omega$. Multiplizieren wir (2.4.3) mit $n^\nu_2 n_{2\lambda}$, so erhalten wir

$$\underset{2}{a} = \underset{1}{a} + \underset{1}{a}\cos^2\Omega + 2\underset{2}{a}\cos^2\Omega,$$

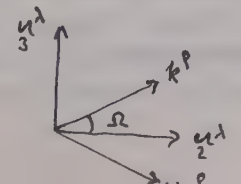
also $\cos^2\Omega = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_3}$ und daraus $\sin\Omega = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}$. -Damit beide Quadratwurzeln reell sind, muß sein $\underset{2}{a} < \underset{1}{a} < \underset{3}{a}$ oder $\underset{3}{a} < \underset{1}{a} < \underset{2}{a}$. Damit ist einer der Eigenwerte des Riccitensors ausgezeichnet, zu dem alle Strahlenvektoren des Feldes gehören. Wir haben bewiesen den

Satz (2.4.1): In einem nichtentarteten statischen Vakuumfeld liegen alle Strahlen im Orthogonalraum zu demjenigen Eigenvektor des Riccitensors $\bar{R}_{\mu\nu}$ der Raum-Metrik, der zum numerisch zweitgrößten Eigenwert gehört. Die Raumprojektionen der Strahlenvektoren in der Normierung $k_a \xi^a = 1$ sind

$$\begin{aligned} k^\mu &= e^{-U}(\cos\Omega\, n^\mu_2 + \sin\Omega\, n^\mu_3), \quad -k^\mu, \\ m^\mu &= e^{-U}(\cos\Omega\, n^\mu_2 - \sin\Omega\, n^\mu_3), \quad -m^\mu, \end{aligned} \qquad (2.4.6)$$

$$\cos\Omega = \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_3}}, \quad \sin\Omega = \sqrt{\frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}}.$$

Das folgende Bild (n^λ_1 senkrecht zur Papierebene) macht die Lageverhältnisse anschaulich:



$$\cos 2\Omega = 3\,\frac{a_1}{a_3 - a_2}$$

Wir können also, von einem der k_μ ausgehend, zu den Raumprojektionen der übrigen Strahlenvektoren gelangen, indem wir Ω ersetzen durch $-\Omega$, $\Omega+\pi$, $-\Omega-\pi$. Als "wesentlich verschiedene Strahlenkongruenzen" bezeichnen wir daher im folgenden nur diejenigen mit den Raumprojektionen k^λ und m^λ, vgl.(2.4.6).

Nach unseren Erläuterungen gilt weiter der
Satz (2.4.2): Ein statisches Vakuumfeld ist genau dann entartet, wenn die Raumprojektion k^λ eines Strahlenvektors kollinear mit einem Eigenvektor von $\bar{R}^\lambda_\nu$ ist. Wenn das Feld entartet ist, so ist k^λ Eigenvektor zum ausgezeichneten (d.h."nichtentarteten") Eigenwert von $\bar{R}^\lambda_\nu$.

§5. Weylsche Felder und ihre lichtartigen Eigenrichtungen

Eine wichtige Lösungsklasse innerhalb der statischen Felder sind die Weylschen Felder, in denen es neben der "statischen" Kongruenz ξ^a ein dazu orthogonales Killingvektorfeld η^a mit hyperflächennormalen Trajektorien gibt. Die Metrik eines Weylschen Vakuumfeldes kann auf die kanonische Gestalt[1]

$$Q = e^{-2U}[e^{2K}(dx^2+dy^2) + x^2dz^2] - e^{2U}dt^2,$$

$$U(x,y)\ ,\quad K(x,y)$$

gebracht werden , zu der die Vakuumfeldgleichungen folgendermaßen lauten

$$U_{,11} + \frac{1}{x}U_{,1} + U_{,22} = 0,$$
$$K_{,1} = x(U_{,1}^2 - U_{,2}^2),\ K_{,2} = 2xU_{,1}U_{,2}. \qquad (2.5.1)$$

Der Riccitensor des Raumes hat die Form

$$\left(\!\left(\bar{R}^\lambda_\mu\right)\!\right) = -\begin{pmatrix} a-b & c & 0 \\ c & a+b & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}\cdot e^{2(U-K)} \qquad (2.5.2)$$

---

1 für eine ausführliche Darstellung siehe (3)

und seine Eigenwerte sind

$$\begin{aligned} a_1 &= -(a+\sqrt{b^2+c^2})\cdot e^{2(U-K)}, \\ a_2 &= -(a-\sqrt{b^2+c^2})\cdot e^{2(U-K)}, \\ a_3 &= 2a\cdot e^{2(U-K)}. \end{aligned} \qquad (2.5.3)$$

Dabei sind a,b,c Abkürzungen für die Differentialausdrücke

$$a = \frac{1}{2}\,(U_{,1}{}^2 + U_{,2}{}^2 - \frac{1}{x}U_{,1}),$$

$$b = U_{,22} + xU_{,1}(U_{,1}{}^2 - 3U_{,2}{}^2 + \frac{1}{2x^2}) + \frac{3}{2}(U_{,2}{}^2 - U_{,1}{}^2),$$

$$c = U_{,12} + xU_{,2}(U_{,2}{}^2 - 3U_{,1}{}^2) + 3U_{,1}U_{,2}\,.$$

Weylsche Felder sind genau dann entartet, wenn

$$(b^2+c^2)(b^2+c^2-9a^2) = 0 \qquad (2.5.4)$$

ist.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft Weylscher Felder ist es, daß es in ihnen den einfachen zeitartigen Bivektor

$$F_{ab} = x^{-2}\xi_{[a}\eta_{b]}$$

gibt, der den Maxwellschen Vakuumfeldgleichungen $F^{ab}{}_{;b} = 0$ und $F_{[ab;c]} = 0$ genügt. Natürlich ist damit auch jeder aus F_{ab} durch eine konstante Dualitätsrotation entstehende Bivektor ein Maxwell-Bivektor.

Die Strahlenvektoren eines Weylschen Feldes liegen nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen genau dann in den Orthogonalhyperflächen der raumartigen Gruppentrajektorien (d.h. für Weylsche kanonische Koordinaten in den Hyperflächen z = const), wenn der Eigenwert a numerisch zwischen den beiden anderen Eigenwerten liegt. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß der in (2.5.4) auftretende Differentialausdruck $b^2 + c^2 - 9a^2 > 0$ ist. Wir können diesen Sachverhalt zum Anlaß nehmen, die nichtentarteten Weylschen Vakuumfelder in zwei Klassen zu unterteilen:
In H1-Felder, bei denen die Strahlenvektoren nicht in den Orthogonalhyperflächen der raumartigen Gruppentrajektorien

liegen, die also gekennzeichnet sind durch $k_a\eta^a \neq 0$ oder $b^2 + c^2 - 9a^2 < 0$, sowie in H2-Felder, bei denen die Strahlenvektoren in den Orthogonalhyperflächen der raumartigen Gruppentrajektorien liegen, was gleichwertig ist mit $k_a\eta^a = 0$ oder $b^2 + c^2 - 9a^2 > 0$.

Mit Hilfe von (2.4.3) und (2.5.2) lassen sich die Komponenten der Strahlenvektoren in Weylschen kanonischen Koordinaten berechnen:

H1-Felder

$$k_0 = 1,\quad k_\lambda n_1^\lambda = 0,$$

$$k_1^2 = \frac{(b+3a)(b-\sqrt{b^2+c^2}) + c^2}{b^2+c^2-9a^2}\, e^{-4U+2K},$$

$$k_2^2 = \frac{(b-3a)(b+\sqrt{b^2+c^2}) + c^2}{b^2+c^2-9a^2}\, e^{-4U+2K}, \qquad (2.5.5)$$

$$k_3^2 = \frac{3a-\sqrt{b^2+c^2}}{3a+\sqrt{b^2+c^2}}\, x^2\, e^{-4U},$$

$$k_1 k_2 = \frac{c}{3a+\sqrt{b^2+c^2}}\, e^{-4U+2K}.$$

Die letzte dieser Beziehungen besagt zusätzlich zu den vorangehenden lediglich, daß die Vorzeichen von k_1 und k_2 nur gemeinsam abgeändert werden dürfen. Es ist dann leicht zu sehen, welche Komponenten die vier Strahlenkongruenzen besitzen, sie entsprechen den noch verbleibenden vier Möglichkeiten der Vorzeichenverteilung auf die Beträge $|k_1|$, $|k_2|$ und $|k_3|$. Die (2.5.5) entsprechenden Formeln für den Fall $k_\lambda n_2^\lambda = 0$ erhält man aus (2.5.5), indem man b durch -b ersetzt.

H2-Felder

$$k_0 = 1,\quad k_3 = 0,$$

$$k_1^2 = \frac{b^2+c^2-3ab \pm c\sqrt{b^2+c^2-9a^2}}{2(b^2+c^2)}\, e^{-4U+2K},$$

$$k_2^2 = \frac{b^2+c^2+3ab \mp c\sqrt{b^2+c^2-9a^2}}{2(b^2+c^2)}\, e^{-4U+2K}, \qquad (2.5.6)$$

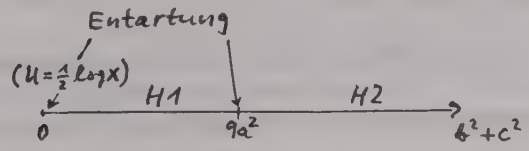
$$k_1 k_2 = \frac{3ac \pm b\sqrt{b^2 + c^2 - 9a^2}}{2(b^2 + c^2)}\, e^{-4U + 2K}.$$

In diesen Formeln gibt das obere Vorzeichen die eine, das untere Vorzeichen die andere der wesentlich verschiedenen Strahlenkongruenzen (vgl. dazu die Bemerkung zu Satz (2.4.1)). Die letzte Gleichung legt wiederum die Vorzeichen von k_1 und k_2 so fest, daß sie nur gemeinsam geändert werden dürfen.

Wir wenden uns jetzt dem Falle der Entartung[1] zu, der darin besteht, daß die wesentlich verschiedenen Strahlenkongruenzen des Feldes zusammenfallen. Die Formeln (2.5.5,6) zeigen, daß die H1-Felder nur dadurch entarten können, daß $b^2 + c^2 = 0$ ist, während bei der Entartung der H2-Felder $b^2 + c^2 - 9a^2 = 0$ werden muß.

Um die Entartungsfälle der H1-Felder zu bestimmen, setzen wir in (2.5.5) $b = c = 0$ und erhalten $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = x^2 e^{-4U}$. Da die Strahlenkongruenz eines entarteten Feldes geodätisch[2] ist, folgt $k_{3,1} = 0$, $k_{3,2} = 0$, und es ergibt sich $U = 1/2 \log x$. Wir sehen also, daß die Klasse der H1-Felder im Falle der Entartung nur eine einzige Metrik enthält; diese ist ein spezielles zylindersymmetrisches Feld, es ist zugleich das einzige Weylsche Feld, dessen Strahlenkongruenzen mit den lichtartigen Eigenrichtungen des auf Seite 30 angegebenen Maxwell-Bivektors übereinstimmen.

Wir können die beschriebenen Verhältnisse an einem Diagramm illustrieren, bei dem wir in horizontaler Richtung $b^2 + c^2$ aufgetragen haben:



1 für eine vierdimensional-kovariante Beschreibung der entarteten statischen Vakuumfelder siehe (7)

2 siehe z.B.(5)

Kapitel 3. Statische Vakuumfelder mit geodätischen Strahlen

§1. Geodätische Strahlen in statischen Vakuumfeldern

Im vierten Paragraphen des zweiten Kapitels wurden Strahlenvektoren eines statischen Vakuumfeldes durch die Ricci-Eigenwerte und Ricci-Eigenvektoren der Raum-Metrik ausgedrückt. Damit ist die Möglichkeit geschaffen worden, Eigenschaften der Strahlenkongruenzen auf die Geometrie der Raumschnitte zurückzuführen und Felder systematisch zu untersuchen, deren Strahlenkongruenzen spezielle geometrische Eigenschaften haben.

Eine beliebige Nullkongruenz in der Normierung $k_a\xi^a = 1$ ist genau dann geodätisch, wenn im Raum

$$k_{\mu\|\nu}k^\nu + e^{-2U}U_{,\mu} = 0$$

oder damit gleichwertig

$$k_{[\mu,\nu]}k^\nu = 0 \qquad (3.1.1)$$

gilt. Sie ist genau dann drehungsfrei, wenn

$$k_{[\mu,\nu]} = 0 \qquad (3.1.2)$$

und genau dann divergenzfrei, wenn

$$\Theta = \frac{1}{2}e^{-U}(e^U k^\mu)_{\|\mu} = 0 \qquad (3.1.3)$$

ist.

Der Vorteil unserer Normierung $k_a\xi^a = 1$ liegt darin, daß im Falle der Geodäsie $k_{a;b}k^b = 0$, im Falle verschwindender Drehung $k_{[a,b]} = 0$ erfüllt ist.

Wenn die betrachtete Nullkongruenz k_a ein Strahlenvektorfeld ist, so erhalten wir mit dem k_λ aus (2.5.4) die folgenden Beziehungen (Bezeichnungen wie im Kap.2,§2):

$k_{a;b}k^b = 0$:

$$U_{.1} - \gamma_{122}\cos^2\Omega - \gamma_{133}\sin^2\Omega + (\gamma_{213} + \gamma_{312})\cdot\cos\Omega\sin\Omega = 0, \qquad (3.1.4)$$

$$(U_{.2} - \Omega_{.3} - \gamma_{233})\cdot\sin\Omega = (U_{.3} + \Omega_{.2} - \gamma_{322})\cdot\cos\Omega. \qquad (3.1.5)$$

$k_{[a,b]} = 0$:

$$U_{.1}\cos\Omega - \gamma_{122}\cos\Omega + (\gamma_{312} - \gamma_{321})\cdot\sin\Omega = 0, \qquad (3.1.6)$$

$$U_{.1}\sin\Omega - \gamma_{133}\sin\Omega + (\gamma_{213} - \gamma_{231})\cdot\cos\Omega = 0, \qquad (3.1.7)$$

$$(U_{.2} - \Omega_{.3} - \gamma_{233})\cdot\sin\Omega = (U_{.3} + \Omega_{.2} - \gamma_{322})\cdot\cos\Omega\ . \qquad (3.1.8)$$

Die Strahlendivergenz ist

$$\Theta = \frac{1}{2}e^{-U}[(\Omega_{.3} + \gamma_{211} + \gamma_{233})\cos\Omega - (\Omega_{.2} - \gamma_{311} - \gamma_{322})\sin\Omega].$$

Die Gleichungen (3.1.4-8) und die Gleichung $\Theta = 0$ gelten natürlich für $\Omega + \pi$ ebenso wie für Ω. Daher können wir in den entsprechenden Diskussionen auch hier von "den zwei Strahlenkongruenzen des Feldes" sprechen.

Aus (3.1.4) lesen wir folgendes ab:

Satz (3.1.1): Wenn in einem statischen Vakuumfeld alle vier Strahlenkongruenzen geodätisch sind, so sind die Riccilinien im Raum flächennormal.

Um das einzusehen, brauchen wir außer (3.1.4) nur die daraus durch die Substitution $\Omega \to -\Omega$ entstehende Gleichung zu betrachten. Aus beiden Beziehungen folgt dann $\gamma_{213} + \gamma_{312} = 0$ und daraus ergibt sich für die in (2.2.3) definierte Invariante $A = 0$.

Wenn es sich bei dem vorliegenden Feld um eine Weylsche H2-Metrik handelt, sind die Gleichungen (3.1.4,6,7) identisch erfüllt und die Bedingung dafür, daß die Strahlenkongruenz geodätisch ist, stimmt mit der Bedingung für die Drehungsfreiheit überein. Es gilt also der

Satz (3.1.2): Geodätische Strahlen, die in den Orthogonalhyperflächen der raumartigen Gruppentrajektorien eines Weylschen Vakuumfeldes liegen, sind auch drehungsfrei.

§2. Drehungsfreie Strahlenkongruenzen in statischen Vakuumfeldern der Klasse A = 0.[1]

Als Anwendung der bisher gewonnenen Formeln und Sätze behandeln wir in diesem Paragraphen statische Vakuumfelder der Klasse A = 0, die eine drehungsfreie Strahlenkongruenz enthalten. Alle bisher bekannten statischen Lösungen der Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen, insbesondere die wichtigen Weylschen Felder, gehören der Klasse A = 0 an. Wir interessieren uns jedoch nur für nichtentartete Felder.

Wenn wir annehmen, daß die Eigenvektoren des Riccitensors der Raum-Metrik flächennormal sind, können wir setzen

$$n_{1\mu} = e^{R}\delta^{1}_{\mu}\,, \quad n_{2\mu} = e^{S}\delta^{2}_{\mu}\,, \quad n_{3\mu} = e^{W}\delta^{3}_{\mu} \tag{3.2.1}$$

und wegen $$g_{\mu\nu} = n_{1\mu}n_{1\nu} + n_{2\mu}n_{2\nu} + n_{3\mu}n_{3\nu}$$

lautet die Metrik des Feldes

$$Q = e^{2R}dx^2 + e^{2S}dy^2 + e^{2W}dz^2 - e^{2U}dt^2\,. \tag{322.2}$$

Die Ricci-Koeffizienten sind dann

$$\begin{aligned} &\gamma_{122} = S_{.1}\,, \gamma_{211} = R_{.2}\,, \gamma_{311} = R_{.3}\,,\\ &\gamma_{133} = W_{.1}\,, \gamma_{233} = W_{.2}\,, \gamma_{322} = S_{.3}\,,\\ &\gamma_{\mu\nu\lambda} = 0 \text{ für } \mu\nu\lambda \neq . \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Aus der Annahme, daß die Drehung der Strahlenkongruenz verschwindet, folgt nach (3.1.6,7) und (3.2.1,3) $U_{,1} = S_{,1}$ und $U_{,1} = W_{,1}$, also

$$S = U + Y(y,z), \quad W = U + Z(y,z) \tag{3.2.4}$$

mit beliebigen Funktionen Y und Z. Daraufhin ergeben die Integrabilitätsbedingungen (2.2.6) für $\lambda = 1$ $\varkappa_{2,1} = 0$, $\varkappa_{3,1} = 0$, wegen der Spurbedingung also auch $\varkappa_{1,1} = 0$, d.h. $\varkappa = \varkappa(y,z)$.

---

[1] das sind die Felder mit hyperflächennormalen Riccilinien

Wenn wir dann (2.2.6) für $(\lambda,\nu) = (2,1)$ und $(3,1)$ aufschreiben, erhalten wir

$$\varkappa_{1,2} + (\varkappa_1 - \varkappa_2)(R_{,2} - U_{,2}) = 0,$$

$$\varkappa_{1,3} + (\varkappa_1 - \varkappa_3)(R_{,3} - U_{,3}) = 0,$$

und daraus folgt, da wir den Fall der Entartung ausschließen, $R - U = X(y,z) + F(x)$. Wir können dann durch Abänderung der x-Koordinate $F = 0$ machen und erhalten für die Metrik

$$Q = e^{2U}(e^{2X}dx^2 + e^{2Y}dy^2 + e^{2Z}dz^2 - dt^2).$$

Da die Funktionen X,Y,Z nicht von x abhängen, gibt es einen hyperflächennormalen Konformvektor, der nach Satz (1.2.1) ein Killingvektor sein muß. Damit erhalten wir den Satz (3.2.1): Statische Vakuumfelder der Klasse A = 0, die eine drehungsfreie Strahlenkongruenz enthalten, sind Weylsche Felder. Die Kongruenz liegt in den Orthogonalhyperflächen der raumartigen Gruppentrajektorien (H2-Feld).

Eine Weylsche Lösung mit drillfreiem Strahl ist leicht zu gewinnen, wenn wir in (2.5.5) $k_2 = 0$ setzen. Dann ist nämlich $k_1 = e^{-2U+K}$ und die Bedingung der Drehungs-(Drill-) Freiheit $k_{1,2} = k_{2,1} = 0$ besagt, daß $2U_{,2} = K_{,2}$ sein muß. Aus (2.5.1,2) folgt dann $U = \log x + Ay$, $K = \log x - \frac{1}{2}A^2x^2 + 2Ay$. Diese Lösung läßt sich invariant folgendermaßen charakterisieren: Seien ξ^a und η^a die beiden hyperflächennormalen Killingvektoren des Weylschen Feldes und sei k_a ein Strahlenvektor, dann lauten die kennzeichnenden Bedingungen

$$k_{[a,b}k_{c]} = 0, \quad \eta^{abcd}k_a\xi_b\eta_c(\xi_k\xi^k\eta_j\eta^j)_{,d} = 0.$$

Das so gekennzeichnete Feld wurde 1960 von R.K.Sachs gefunden[1], seine Strahlenkongruenz hat die besondere Eigenschaft, daß zwischen ihrer Verzerrung und ihrer Divergenz die Relation $|\sigma|^2 = \Theta^2$ besteht.

---

[1] (6)

§3. Geodätische Strahlenkongruenzen in statischen Vakuumfeldern der Klasse A = 0.

Wir schwächen die Voraussetzungen des vorigen Paragraphen ab und nehmen nur noch an, die Strahlenkongruenz sei geodätisch. Dann können wir von §2 die Formeln (3.2.1,2,3) übernehmen; aus (3.1.4,5) folgt

$$U_{,1} - S_{,1}\cos^2\Omega - W_{,1}\sin^2\Omega = 0,$$

$$(e^{W-U}\sin\Omega)_{,2} - (e^{S-U}\cos\Omega)_{,3} = 0.$$

Die Bauart dieser Gleichungen legt nahe, die Substitution

$$R = U + X, \quad S = U + Y, \quad W = U + Z \tag{3.3.1}$$

auszuführen, unsere Gleichungen gehen dann über in

$$Y_{,1}\cos^2\Omega + Z_{,1}\sin^2\Omega = 0, \tag{3.3.2}$$

$$(e^{Z}\sin\Omega)_{,2} = (e^{Y}\cos\Omega)_{,3}. \tag{3.3.3}$$

Neben diesen Beziehungen haben wir die Integrabilitätsbedingungen (2.2.6) für die Vakuumfeldgleichungen zu betrachten. Für $\lambda = 1$ ergeben diese unter Berücksichtigung von (3.3.2) $\varkappa_{2,1} = \varkappa_{3,1}$. Wir erfüllen diese Gleichung und zugleich auch die Spurbedingung $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 0$, indem wir setzen

$$\varkappa_1 \equiv -2p, \quad \varkappa_2 \equiv p + m, \quad \varkappa_3 \equiv p - m \tag{3.3.4}$$

mit $p = p(x^\lambda)$, $m = m(y,z)$. In diesen Bezeichnungen ergeben die übrigen Integrabilitätsbedingungen (2.2.6) (Indizes bedeuten von nun an immer Ableitung nach der entsprechenden Koordinate)

$$\begin{aligned} p_1 + (3p + m)\cdot Y_1 &= 0, \\ p_1 + (3p - m)\cdot Z_1 &= 0, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

$$\begin{aligned} 2p_2 + (3p + m)\, X_2 &= 0, \\ 2p_3 + (3p - m)\, X_3 &= 0, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

$$\begin{aligned} p_2 - m_2 - 2mZ_2 &= 0, \\ p_3 + m_3 + 2mY_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Diese 6 Gleichungen betrachten wir als Differentialgleichungssystem für die 5 Funktionen X,Y,Z,p,m und stellen hierfür die Integrabilitätsbedingungen auf. Dazu lösen wir die Gleichungen nach p und den Ableitungen von p und m auf und erhalten

$$p = \frac{m}{3}\frac{Z_1 + Y_1}{Z_1 - Y_1},$$

$$p_1 = -2m\frac{Z_1Y_1}{Z_1 - Y_1}, \quad p_2 = -m\frac{Z_1X_2}{Z_1 - Y_1}, \quad p_3 = -m\frac{Y_1X_3}{Z_1 - Y_1}, \tag{3.3.8}$$

$$m_2 = -m\left(\frac{Z_1X_2}{Z_1 - Y_1} + 2Z_2\right), \quad m_3 = +m\left(\frac{Y_1X_3}{Z_1 - Y_1} - 2Y_3\right).$$

Diese Formeln können wir nur aufstellen, wenn $Z_1 - Y_1 \neq 0$ ist. Für $Z_1 = Y_1$ folgt mit (3.3.2) $Z_1 = Y_1 = 0$. Dann aber ist die Kongruenz drehungsfrei und wir haben den Fall des Paragraphen 2. Wir nehmen also an, daß $Z_1 \neq Y_1$ ist; da wir ferner die Entartung des Feldes ausschließen, dürfen wir wegen (3.3.2) auch annehmen, daß $Y_1Z_1 \neq 0$ und $Y_1 + Z_1 \neq 0$ ist.

Nunmehr stellen wir die aus (3.3.8) folgenden Gleichungen für X,Y und Z auf und eliminieren zweite Ableitungen mit Hilfe der Feldgleichungen

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{12} = 0: &\quad Z_{12} + Z_1Z_2 - Z_1X_2 - Y_1Z_2 = 0,\\
\bar{R}_{13} = 0: &\quad Y_{13} + Y_1Y_3 - Y_1X_3 - Z_1Y_3 = 0,\\
\bar{R}_{23} = 0: &\quad X_{23} + X_2X_3 - X_2Y_3 - Z_2X_3 = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Dann erhalten wir aus der Bedingung

$$p_2 = p_{,2}: \quad Y_1^{-1}Y_{11} - 3Y_1 = Z_1^{-1}Z_{11} - 3Z_1, \tag{3.3.10}$$

$$p_2 = p_{,2}: \quad Y_{12} + (Z_1 - 3Y_1)X_2 + (Y_1 - 2Z_1)Z_2 + Y_1^2\frac{Z_2}{Z_1} = 0, \tag{3.3.11}$$

$$p_3 = p_{,3}: \quad Z_{13} + (Y_1 - 3Z_1)X_3 + (Z_1 - 2Y_1)Y_3 + Z_1^2\frac{Y_3}{Y_1} = 0,$$

$$p_{2,3} = p_{3,2}: \qquad Z_2X_3 - Y_3X_2 = 0, \tag{3.3.12}$$

$$m_{2,1} = 0: X_{12} + 2Z_1X_2 - 5Y_1X_2 - 2\frac{Z_2}{Z_1}(Z_1 - Y_1)^2 = 0, \tag{3.3.13}$$

$$m_{3,1} = 0: X_{13} + 2Y_1X_3 - 5Z_1X_3 - 2\frac{Y_3}{Y_1}(Z_1 - Y_1)^2 = 0.$$

Sodann differenzieren wir (3.2.10)nach y bzw. z und eliminieren alle dritten und zweiten Ableitungen mit Hilfe der Gleichungen (3.3.9,10,11,13), das ergibt

$$\begin{aligned} Z_1(Z_1 + Y_1)X_2 + (2Z_1 - Y_1)(Z_1 - Y_1)Z_2 &= 0, \\ Z_1(Z_1 + Y_1)X_3 + (Z_1 - 2Y_1)(Z_1 - Y_1)Y_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Von den Beziehungen (3.3.2,3), welche die Geodäsie der Strahlenkongruenz ausdrücken, ist (3.3.2) durch (3.3.5) bereits erfüllt. Es bleibt noch die Gleichung (3.3.3), die sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$\begin{aligned} &(e^Z)_{,1}\sin\Omega[(Z_1 - Y_1)(Z_1 + 3Y_1)Z_2 + Z_1(2Y_1 - Z_1)X_2] \\ &= (e^Y)_{,1}\cos\Omega[(Z_1 - Y_1)(3Z_1 + Y_1)Y_3 + Y_1(Y_1 - 2Z_1)X_3]. \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Wir zeigen nun, daß die Gleichungen (3.3.9-15) einander widersprechen, wenn nicht $Z_1 = Y_1 = 0$ ist. Aus (3.3.14) folgt zunächst unter Berücksichtigung von (3.3.12), daß $X_2Y_3 = 0$, $Z_2X_3 = 0$ ist. Wir haben drei Fälle zu unterscheiden: A. $X_2 = X_3 = 0$, B. $X_2 = Z_2 = 0$ (oder $X_3 = Y_3 = 0$), C. $Z_2 = Y_3 = 0$.

Fall A. Aus (3.3.14) folgt, da wegen (3.3.10) $2Z_1 - Y_1 \neq 0$ und $Z_1 - 2Y_1 \neq 0$ sein muß, $Z_2 = 0$ und $Y_3 = 0$. Dann zeigt (3.3.11), daß man durch Abänderung der Koordinaten y und z auch $Y_2 = 0$ und $Z_3 = 0$ erreichen kann. Nach Satz (1.2.1) darf dann auch U nur von x abhängen und es liegt ein zylindersymmetrisches Feld vor, das wegen (3.3.10) entartet ist.

Fall B. Aus (3.3.14b) und (3.3.15) folgt $X_3 = 0$, d.h.Fall A. Wenn $X_3 = Y_3 = 0$ ist, schließt man entsprechend.

Fall C. Aus (3.3.14a) folgt $X_2 = 0$. d.h. Fall B.

Damit haben wir bewiesen den
Satz (3.3.1): Nichtentartete statische Vakuumfelder der Klasse A = 0 , die eine geodätische Strahlenkongruenz enthalten, sind Weylsche Felder. Die Strahlenkongruenz ist notwendig drehungsfrei und liegt in den Orthogonalhyperflächen der raumartigen Gruppentrajektorien.

Wenn wir dies mit den Aussagen von §1 verbinden, so gelangen wir zu der folgenden Feststellung: Falls es in einem statischen Vakuumfeld 4 geodätische Strahlenkongruenzen gibt, so sind diese drehungsfrei. Wir können dann die Koordinaten so wählen, daß $k_\lambda = \delta^3_\lambda$, $m_\lambda = \delta^2_\lambda$ ist, die Metrik lautet dann

$$Q = g_{11}dx^2 + e^{2U}(dy^2 + dz^2) + 2g_{23}dydz - e^{2U}dt^2.$$

(2.4.3) ergibt dann für $\lambda = \nu = 2$ einerseits

$$\bar{R}_{22} = 2a_1 e^{2U} + 2\,\bar{R}_{22},$$

andererseits

$$\bar{R}_{22} = a_1 e^{2U}.$$

Hieraus folgt $a_1 = 0$. Nach einem von J.Ehlers bewiesenen Satz ist das Feld dann pseudoeuklidisch. Es gilt also der
Satz (3.3.2): Statische Vakuumfelder, deren Strahlenkongruenzen sämtlich geodätisch sind, sind entweder entartet oder pseudoeuklidisch.

Literatur

(1) J.Ehlers, Konstruktionen und Charakterisierungen von Lösungen der Einsteinschen Gravitationsfeldgleichungen, Dissertation Hamburg 1957

(2) J.A.Schouten, Ricci-Calculus, Berlin 1954

(3) P.Jordan, J.Ehlers, W.Kundt; Strenge Lösungungen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie I, Akad.Wiss.Mainz, Abh.math.-nat.Kl. 1960, Nr.2

(4) P.Jordan, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig 1955

(5) P.Jordan, J.Ehlers, R.K.Sachs; Beiträge zur Theorie der reinen Gravitationsstrahlung, Akad.Wiss.Mainz, Abh.math.-nat.Kl. 1961, Nr.1

(6) R.K.Sachs, The Outgoing Radiation Condition in General Relativity, Preprint, London 1961

(7) J.Ehlers, W.Kundt; Kap.3 in The Theory of Gravitation, Herausgeber L.Witten, erscheint bei Wiley, New York

(8) Levi-Civita, ds^2 einsteiniani in campi newtoniani, Rend.Akad.Lincei, 26 (1917), 27 (1918), 28 (1919)

(9) C. Moller, The Theory of Relativity, Oxford 1952

(10) J.Ehlers, Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien, Akad.Wiss.Mainz, Abh.math.-nat.Kl. 1961

(11) J.L.Synge, A.Schild; Tensor Calculus, The University of Toronto Press, 1952

Lebenslauf

Am 5. Juli 1934 wurde ich in Wernigerode als Sohn des Gewerbelehrers Ernst Trümper und seiner Ehefrau Anneliese, geb.Grothe, geboren. Von Ostern 1940 an besuchte ich die Grundschule in Wernigerode, bis wir im Dezember 1941 nach Bernburg zogen. Dort wurde ich 1944 in die Oberschule aufgenommen, an der ich 1952 die Reifeprüfung ablegte.

Im Herbst 1952 begann ich das Studium der Physik an der Martin-Luther-Universität in Halle. Hier waren meine Lehrer die Herren Professoren H.Grötzsch, O.-H.Keller, Messerschmidt, Mönch sowie die Herren Dozenten Dr. Zimmermann, Dr. Ackermann, Dr. Schwieger und Dr.M.Hiecke.

Nach vier Semestern, im Oktober 1954, ging ich zur Universität Hamburg und legte dort im Juni 1955 die Diplom-Vorprüfung ab. Seit 1956 arbeitete ich in Prof.Jordans Seminar für Allgemeine Relativitätstheorie mit, im März 1959 bestand ich die Diplom-Hauptprüfung in Physik. Meine Lehrer an der Universität Hamburg waren die Herren Professoren H.Hasse, L.Collatz, I.Sperner, W.Lenz, P.Jordan, E.Bagge, K.Artmann, H.Raether, H.Lehmann und C.F.Frh.v.Weizsäcker.

Für die Anregungen zu dieser Arbeit und für seine immerwährende freundliche Hilfe danke ich herzlich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Pascual Jordan.

Auch der Akademie der Wissenschaften und der Literatur in Mainz sage ich für ihre Unterstützung meinen herzlichen Dank.